~~Ind~~écomposabilité de la loi de Poisson par les séries entières | Leçons : (241), 243, 245, 261, 264, 266

Théorème : Soit X, Y indépendantes tq $X+Y=Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
Alors X et Y sont suivant des lois de Poissons.

Thm ~~(...)~~ : Si f fonction entière ne s'annulant pas. Alors il existe F fonction entière telle que $f = e^F$

~~Rem~~

Preuve : Soit G_X, G_Y la fonction génératrice de X et Y.
X et Y sont indépendants et $Z = X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ d'où

$$\forall s \in \mathbb{D}(0,1),\ G_{X+Y}(s) = G_X(s)\,G_Y(s) = e^{\lambda(s-1)} \qquad (1)$$

$\boxed{\text{Etape 1 :}}$ On veut étendre cette égalité à $\mathbb{C}$ entier.

On a $G_X(s) = \sum_{n\geq 0} P(X=n)s^n$ et $G_Y(s) = \sum_{n\geq 0} P(Y=n)s^n$, $\forall s \in \mathbb{D}(0,1)$

D'après (1) on a

$$\left(\sum_{n\geq 0} P(X=n)s^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} P(Y=n)s^n\right) = \sum_{n\geq 0} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}s^n$$

Produit de série (Cauchy)

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} P(X=n-k)P(Y=k)\right)s^n = \sum e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}s^n$$

D'où par unicité de la décomposition en série entière on a

$$P(X=0)P(Y=0) = e^{-\lambda} > 0 \Rightarrow P(X=0), P(Y=0) > 0 \text{ et } \forall n \geq 1 :$$

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = P(X=n)P(Y=0) + \dots + P(X=0)P(Y=n) \geq \max\big(P(X=n)P(Y=0), P(X=0)P(Y=n)\big)$$

D'où

$$0 \leq P(X=n) \leq \frac{1}{P(Y=0)}\max\big(P(X=n)P(Y=0), P(X=0)P(Y=n)\big) \leq \frac{1}{P(Y=0)}\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

or $\frac{1}{P(Y=0)}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ est le terme général d'une série entière de rayon de convergence $R=+\infty$

D'où la série de terme général $P(X=n)$ aussi c'est-à-dire G_X donc G_X est entière.

De même pour G_Y.

On a donc par prolongement analytique que $G_X(s)G_Y(s) = e^{\lambda(s-1)}$ est valable $\forall s \in$
De plus comme $s \mapsto e^{\lambda(s-1)}$ ne s'annule pas, G_X et G_Y non plus sur $\mathbb{C}$

$\boxed{\text{Etape 2}}$ Identification de G_X et G_Y

Soit $s \in \mathbb{C}$, notons $r = |z|$, par inégalités triangulaires dans les sommes partielles et passage à la limite on a :

$$\cancel{|f(z)| \leq f(|z|) = f(r)}$$

$$|G_X(s)| \leq G_X(|s|) = G_X(r)$$

Or $0 < P(Y=0) \leq G_Y(r)$ donc $P(Y=0)G_X(r) \leq G_X(r)G_Y(r) = e^{\lambda(r-1)}$

Ainsi il existe $C > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|G_X(zs)| \leq Ce^{\lambda|s|}$

De même pour G_Y on a $|G_Y(s)| \leq C'e^{\lambda|s|}$ (2)

Or G_X et G_Y sont entières et ne s'annulent pas donc on a $G_X = e^f$ et $G_Y = e^g$ où f et g sont entières.

On a alors (2) qui devient $|G_X(s)| = e^{\mathrm{Re} f(s)} \leq Ce^{\lambda|s|}$

D'où $\mathrm{Re} f(s) \leq \ln C + \lambda|z|$

Or f est entière donc on peut l'écrire sous la forme d'une série entière $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$

Avec $a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\,dt$

$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{int}\,dt$

On somme la deuxième expression et on somme $a_n r^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re} f(re^{it})e^{-int}\,dt$

D'où $|a_n||r^n| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\mathrm{Re} f(re^{it})|\,dt \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln C + \lambda r\,dt \leq 2\ln C + 2\lambda r$

D'où $|a_n| \leq \frac{2\ln C}{r^n} + \frac{2\lambda}{r^{n-1}} \underset{r \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ si $n \geq 2$. D'où $a_n = 0$ $\forall n \geq 2$

D'où $f(z) = \alpha z + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow G_X(s) = e^{\alpha s + \beta}$ or $G_X(1) = 1 = e^{\alpha}e^{\beta}$ quitte à changer α en $\alpha + 2ik\pi$

on prend $\alpha = -\beta$

$G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$

Il reste alors à vérifier que $\lambda \geq 0$ $\lambda \in \mathbb{R}^+$ car on reconnaîtra la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre λ.

$G_X'(s) = \lambda e^{\lambda(s-1)}$ donc $G_X'(1) = \lambda$ or $G_X'(1) = E(X) \geq 0$

D'où $\lambda \geq 0$ et $G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$

D'où $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, de même pour Y.

□

Analyse complexe, Queffélec

$\boxed{\text{COMPLÉMENT}}$

- f entière qui s'annule pas sur U ~~étoilé~~ convexe dans $\exists g$ entière tq $f = e^g$

en effet on pose $h = \frac{f'}{f}$

U est ~~étoilé~~ convexe donc h admet une primitive par Cauchy notée g_0

Or $\left(f e^{-g_0}\right)' = f' e^{-g_0} - \underbrace{g_0' f}_{= hf = f'} e^{-g_0} = 0$

D'où $f e^{-g_0}$ est cst non nulle d'où $\exists k$ tq $f = e^{\overbrace{k + g_0}^{= g}}$

~~cas pour $z \in U$, $[a,z] \subset U$ on pose $F(z) = \int_{[a,z]} f(u)\,du$~~

cas pour $z \in U$, $[a,z] \subset U$ on pose $F(z) = \int_{[a,z]} f(u)\,du$ par Goursat on a

$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(u)\,du$ d'où $\left|\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}\right| \leq \sup_{u \in [z_0,z]} |f(u) - f(z_0)| \xrightarrow[z \to z_0]{} 0$

D'où $F' = f$.

- Holomorphe ⇒ Analytique

~~f(z)=f~~ on $F(z) = \int \frac{\varphi(u)}{u - z}\,du$ est analytique car $\frac{1}{u-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}}$ pour $z \in D(a,r)$

D'où $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(a)(z-a)^n$ où $c_n(a) = \int \frac{\varphi(u)}{(u-a)^{n+1}}\,du$.

D'où pour f holomorphe dans U et $a \in U$ ⇒ par Cauchy $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(u)}{u - z}\,du$ et donc ok d'après avant.